**Моделирование вертикальных и горизонтальных холдингов.**

В предыдущих главах мы освоили методы построения математических моделей на учебных задачах. В этой главе мы рассмотрим вполне реальные задачи моделирования холдингов.

Холдинг -это группа компаний, объединенных общим управлением(управляющая компания). Различаются два основных типа холдингов. Вертикально и горизонтально интегрированные холдинги.

***В вертикально интегрированных холдингах*** есть единое централизованное управление всеми звеньями производственной и сбытовой цепочки. Наиболее частый вариант – это сельскохозяйственный вертикально интегрированный холдинг. В таком холдинге есть компании, которые отвечают за:

- производство сырья ,например выращивание сельхозкультур (агрофирмы)

- переработку сырья в корма для скота(заводы по производству комбикормов)

- выращивание скота (животноводческие фермы)

- переработку скота (мясные комбинаты)

- реализацию продукции животноводства (фирменная сбытовая сеть).

Как видим в данном холдинге вся цепочка. Именно наличие полной цепочки дает существенные конкурентные преимущества, которые проявляются в независимости от внешних поставщиков.

Поэтому сельхоз предприятия постоянно укрупняются и стремятся превратиться в вертикально интегрированные холдинги.

Математическое моделирование вертикально интегрированных холдингов – это очень важная и актуальная задача, решение которой позволяет существенно оптимизировать производственные и логистические затраты, а значит и увеличивать конкурентное преимущество холдинга.

В общем виде задача математического моделирования вертикально интегрированного холдинга формулируется следующим образом: построить математическую модель, которая определяла бы оптимальную производственную программу для каждого предприятия , а также определяла бы все логистические цепочки (куда что везти, где что производить). Оптимальность определяется как правило из условий минимума целевой функции - общих затрат на производство и реализацию продукции. Есть более сложные модели , в которых оптимальность переделяется из условия максимизации целевой функции – общей прибыли холдинга.

Остановимся с Вами на примере моделирования вертикально интегрированного холдинга.

Предположим, что в холдинге есть следующая цепочка:

Три агрофирмы, каждая из которых выращивает три вида сельхозкультур (пшеница, рапс, рожь)

Три завода по переработки культур в комбикорма для свиней

Три свинофермы

Три мясных комбината. Для простоты, предположим, что все мясные комбинаты выпускают один вид продукции.

9 точек сбыта. На каждой точке сбыта, определена годовая потребность в мясной продукции

**Задача:**

-определить, какого вида зерна и сколько выращивать на каждой агрофирме,

-сколько перевозить зерна и какого вида на каждый комбикормовый завод,

- какого вида и сколько производить комбикормов на каждом комбикормовом заводе

- какого вида и сколько перевозить комбикормов и на какие сфинофермы

- сколько производить мяса на каждой свиноферме и сколько перевозить его на мясные комбинаты

- сколько производить продукции на каждом мясном заводе и сколько перевозить продукции до каждой точки сбыта.

Как видите задача комплексная и сложная. Перед тем как ее решать сформулируем основную теорему логистики.

***Минимум общей целевой функции затрат на производство и транспортировку всегда <=***

***Суммы минимумов целевых функций каждого звена.***

Т.е. если мы будем планировать производство и транспортировку сначала на первом звене и искать минимум, потом из оставшихся распределений ресурсов искать минимум на втором звене и так далее мы получим заведомо неоптимальное решение. Стоимость такой цепочки будет больше (иногда существенно), чем цепочки, которая строится из поиска минимума общей функции затрат.

Именно поэтому необходимо искать оптимальное распределение производственной и транспортной цепочки из поиска минимума общей функции затрат.

**Построим математическую модель рассматриваемого вертикально интегрированного холдинга.**

Для каждого звена цепочки введем переменные.

1. *Звено агрофирмы.*

AKij – матрица производственных мощностей агрофирм, показывающая максимально сколько на агрофирме i можно вырастить культуры j

AСij – матрица себестоимости выращивания j культуры на I агрофирме

ARij - матрица расстояний от I агрофирмы до j комбикормового завода

AP –цена перевозки одной тонны зерна на 1 км

**AXij** - сколько будет выращено на I агрофирме j культуры

**AD1ij** - сколько будет доставлено с 1 агрофирмы i культуры на j завод

**AD2ij –** сколько будет доставлено с 2 агрофирмы I культуры на j завод

**AD3ij –** сколько будет доставлено с 3 агрофирмы I культуры на j завод

В задаче нам нужно определить матрицы **AD1ij, AD2ij, AD3ij** или трехмерную матрицу **ADkij**

Для простоты мы предположили что есть три вида зерновых культур.

1. *Звено комбикормовые заводы.*

ZKij – матрица производственных мощностей комбикормовых заводов, показывающая сколько на заводе i можно выпустить корма j

ZСij – матрица себестоимости производства j вида корма на I заводе

ZRij - матрица расстояний от I завода до j свинофермы

ZT1ij – матрица коэффициентов для первого завода сколько необходимо тонн i культуры для производства 1 тонны j корма (часто эту матрицу называют матрицей выходов или спецификацией)

ZT2ij – матрица коэффициентов для второго завода сколько необходимо тонн i культуры для производства 1 тонны j корма

ZT3ij – матрица коэффициентов для третьего завода сколько необходимо тонн i культуры для производства 1 тонны j корма

ZP – цена перевозки 1 тонны комбикорма на 1 км

**ZXij** - сколько будет произведено на I заводе j корма

**ZD1ij** - сколько будет доставлено с 1 завода i корма на j свиноферму

**ZD2ij –** сколько будет доставлено с 2 завода i корма на j свиноферму

**ZD3ij –** сколько будет доставлено с 3 завода i корма на j свиноферму

В задаче нам нужно определить матрицы **ZD1ij, ZD2ij, ZD3ij**

Для простоты предположим, что есть три вида комбикормов.

1. *Звено свинофермы.*

SKij – матрица производственных мощностей свиноферм, показывающая сколько на i –ой свиноферме можно выпустить мяса тонн в год

SСi – матрица себестоимости производства тонны мяса на I свиноферме

SRij - матрица расстояний от I свинофермы до j мясного комбината

ST1i – матрица коэффициентов для первой свинофермы. Показывает сколько необходимо тонн i-го комбикорма для производства 1 тонны мяса (часто эту матрицу называют матрицей выходов или спецификацией)

ST2i – матрица коэффициентов для второй свинофермы. Показывает сколько необходимо тонн i комбикорма для производства 1 тонны мяса

ST3i – матрица коэффициентов для третьей свинофермы Показывает сколько необходимо тонн i комбикорма для производства 1 тонны мяса

SP – цена перевозки тонны мяса 1 км

**SXi** - сколько будет произведено на I свиноферме тонн мяса

**SDij** - сколько будет доставлено с I свинофермы тонн мяса на j мясной комбинат

В задаче нам нужно определить матрицу **SDij**

1. *Звено мясные комбинаты.*

MKij – матрица производственных мощностей мясных комбинатов, показывающая сколько на i-ом мясном комбинате можно выпустить мясной продукции (для простоты рассматривается один вид продукции) тонн в год

MСi – матрица себестоимости производства 1 тонны продукции на I мясном комбинате

SRij - матрица расстояний от I мясного комбината до j торговой точки

MTi – матрица коэффициентов для i комбината сколько необходимо тонн мяса для производства 1 тонны продукции (часто эту матрицу называют матрицей выходов или спецификацией)

MP – цена перевозки тонны продукции на 1 км

**MXi** - сколько будет произведено на I-ом мясном комбинате тонн мясной продукции

**MDij** - сколько будет доставлено с I –го мясного комбината тонн продукции на j торговую точку

В задаче нам нужно определить матрицу **MDij**

1. *Звено торговые точки*

TKi– потребность тонн продукции для I торговой точки

Предполагается, что в задаче должен быть полностью обеспечен спрос в мясной продукции на торговых точках.

Если мощностей мясных комбинатов у холдинга не хватает, то необходимо покупать продукцию у сторонних поставщиков. Также мощностей может не хватать на любом звене цепочки. Рассмотрим обе задачи отдельно. Первая задача без внешних поставщиков. Эта модель реализуется, когда мощности производства на каждом звене цепочки избыточны.

Вторая задача, когда на каждом звене цепочки есть внешний поставщик.

Решение первой задачи без внешних поставщиков.

Целевая функция = Цена первого звена + Цена второго звена + Цена третьего звена + Цена четвертого звена = Цена производства сельхоз культур + Цена доставки сельхоз культур до комбикормовых заводов + Цена производства комбикормов + Цена доставки комбикормов до свиноферм + Цена производства мясной продукции + Цена доставки мясной продукции до торговых точек

Обратите внимание, что для каждого звена цепочки выделяется производство и доставка. Если предприятия одного звена достаточно удалены от предприятий следующего звена, то транспортная составляющая может быть значительной.

***Цена первого звена***

Цена производства сельхоз культур = $\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ACijAXij$

**AXij=**$\sum\_{k=1}^{3}ADijk$

Итого :

Цена производства сельхоз культур = $\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ACij\sum\_{k=1}^{3}ADijk$

Цена доставки сельхоз культур =AP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ARij\sum\_{k=1}^{3}ADikj$

Первая сумма по всем агрофирмам, вторая сумма по всем заводам , третья по всем культурам.

Итого : Цена первого звена =$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ACij\sum\_{k=1}^{3}ADijk$+ AP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ARij\sum\_{k=1}^{3}ADikj$

***Цена второго звена***

Цена производства комбикормов = $\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZCijZXij$

**ZXij=**$\sum\_{k=1}^{3}ADijk$

Цена производства комбикормов = $\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZCij\sum\_{k=1}^{3}ZDijk$

Цена доставки сельхоз культур =ZP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZRij\sum\_{k=1}^{3}ZDikj$

Первая сумма по всем комбикормовым заводам, вторая сумма по всем свинофермам, третья по всем видам корма.

Итого : Цена второго звена =$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZCij\sum\_{k=1}^{3}ZDijk$+ ZP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZRij\sum\_{k=1}^{3}ZDikj$

***Цена третьего звена***

Цена производства мяса = $\sum\_{i=1}^{3}SCiSXi$

**SXi=**$\sum\_{j=1}^{3}SDij$

Цена производства мяса =$\sum\_{i=1}^{3}SCi\sum\_{j=1}^{3}SDij$

Цена доставки мяса до мясных комбинатов =SP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}SRijSDij$

Первая сумма по всем свинофермам, вторая сумма по всем заводам

Итого : Цена второго звена =$\sum\_{i=1}^{3}SCi\sum\_{j=1}^{3}SDij$+ SP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}SRijSDij$

***Цена четвертого звена***

Цена производства мясной продукции = $\sum\_{i=1}^{3}MCiMXi$

**MXi=**$\sum\_{j=1}^{3}MDij$

Цена производства мясной продукции =$\sum\_{i=1}^{3}MCi\sum\_{j=1}^{3}MDij$

Цена доставки мяса до мясных комбинатов =MP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}MRijMDij$

Первая сумма по всем мясным комбинатам, вторая сумма по всем точкам сбыта

Итого : Цена второго звена =$\sum\_{i=1}^{3}MCi\sum\_{j=1}^{3}MDij$+ MP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}MRijMDij$

***Итоговая целевая функция:***

Общие расходы холдинга = $\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ACij\sum\_{k=1}^{3}ADijk$+ AP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ARij\sum\_{k=1}^{3}ADikj$+$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZCij\sum\_{k=1}^{3}ZDijk$+ ZP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZRij\sum\_{k=1}^{3}ZDikj$+$\sum\_{i=1}^{3}SCi\sum\_{j=1}^{3}SDij$+ SP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}SRijSDij$+$\sum\_{i=1}^{3}MCi\sum\_{j=1}^{3}MDij$+ MP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}MRijMDij$

Итак, целевая функция составлена.

***Рассмотрим необходимые ограничения модели.***

В первую очередь рассмотрим условия на неотрицательность искомых переменных:

ADijk>=0

ZDijk>=0

SDij>=0

MDij>=0

Запишем условия на ограниченность по мощностям для каждого звена:

AXij<= AKij

ZXij<= ZKij

SXi<= SKi

MXi<=MKi

**Запишем условие на выполнение программы по сбыту в последнем звене:**

TKi<=$\sum\_{j=1}^{3}MDji$

**Запишем условие на выполнение потребности в зерне для комбикормовых заводов:**

Для этого мы должны рассчитать для каждого комбикормового завода, сколько зерна каждого вида потратится на выполнение его производственной программы.

Для первого завода потребность в I –ой агрокультуры $\sum\_{j=1}^{3}ZX1j\* ZT1ij$

Аналогично для второго завода потребность в I –ой агрокультуры $\sum\_{j=1}^{3}ZX2j\* ZT2ij$

Аналогично для третьего завода потребность в I –ой агрокультуры $\sum\_{j=1}^{3}ZX3j\* ZT3ij$

Условия обеспечения комбикормовых заводов агрокультурами:

$\sum\_{j=1}^{3}ZX1j\* ZT1ij$<=$\sum\_{j=1}^{3}ADji1$

$\sum\_{j=1}^{3}ZX2j\* ZT2ij$<=$\sum\_{j=1}^{3}ADji2$

$\sum\_{j=1}^{3}ZX3j\* ZT3ij$<=$\sum\_{j=1}^{3}ADji3$

**Запишем условие на выполнение потребности в комбикормах для свиноферм:**

Для этого мы должны рассчитать для каждой свинофермы, сколько комбикормов каждого вида потратится на выполнение производственной программы свинофермы.

Для первой свинофермы для j вида комбикорма $SX1\* ST1j$

Для второй свинофермы для j вида комбикорма $SX2\* ST2j$

Для третей свинофермы для j вида комбикорма $SX3\* ST3j$

Условия обеспечения комбикормами свиноферм:

 $SX1\* ST1j$<=$\sum\_{i=1}^{3}ZDij1$

$SX2\* ST2j$<=$\sum\_{i=1}^{3}ZDij2$

$SX3\* ST3j$<=$\sum\_{i=1}^{3}ZDij3$

**Запишем условие на выполнение потребности в мясе для мясных комбинатов:**

Для этого мы должны рассчитать для каждой мясного комбината необходимо мяса для выпуска мясной продукции

Для первой мясного комбината $MX1\* M1$

Для второй свинофермы для j вида комбикорма $MX2\* M2$

Для третей свинофермы для j вида комбикорма $MX3\* M3$

Условия обеспечения мясом :

$MX1\* M1$<=$\sum\_{i=1}^{3}SDi1$

$MX2\* M2$<=$\sum\_{i=1}^{3}SDi2$

$MX3\* M3$<=$\sum\_{i=1}^{3}SDi3$

Итак все условия записаны, осталось добавить , что в модели ищется распределение которое минимизирует целевую функцию.

***Теперь составим математическую модель с внешними поставщиками.***

Для решения этой задачи необходимо ввести дополнительные переменные цены внешних поставщиков:

AOij – цена одной тонны I культуры растениеводства для j комбикормового завода

ZOi j– цена одной тонны I го комбикорма для j свинофермы

SOi – цена одной тонны мяса для I го мясного комбината

 MOi – цена одной тонны мясной продукции для I -ой торговой точки.

Aij – ограничение на объем поставок зерна от внешнего поставщика I –ой культуры j – му комбикормовому заводу

Zij – ограничение на объем поставок комбикормов от внешнего поставщика I –го комбикорма j – ой свиноферме

Si - ограничение на объем поставок мяса от внешнего поставщика i- му мясному комбинату

Mi - ограничение на объем поставок мясной продукции от внешнего поставщика i- ой торговой точке.

AODij – сколько будет куплено i- ой культуры для j го комбикормового завода

ZODij – сколько будет куплено i- ого комбикорма для j-ой свинофермы

SODi – сколько будет куплено мяса для I го мясного комбината

TODi - сколько будет куплено мясной продукции для I ой торговой точки

В целевую функцию будут добавлены расходы на закупки у внешних поставщиков:

Стоимость покупки зерна =$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}AOij$\* AODij

Стоимость покупки комбикормов =$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZOij$\* ZODij

Стоимость покупки мяса =$\sum\_{i=1}^{3}SODi\*SOi$

Стоимость покупки мясной продукции =$\sum\_{i=1}^{3}TODi\*TOi$

Добавим эти расходы в уже построенную целевую функции. Получим.

Общие расходы холдинга = $\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ACij\sum\_{k=1}^{3}ADijk$+ AP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ARij\sum\_{k=1}^{3}ADikj$+$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZCij\sum\_{k=1}^{3}ZDijk$+ ZP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZRij\sum\_{k=1}^{3}ZDikj$+$\sum\_{i=1}^{3}SCi\sum\_{j=1}^{3}SDij$+ SP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}SRijSDij$+$\sum\_{i=1}^{3}MCi\sum\_{j=1}^{3}MDij$+ MP$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}MRijMDij$+$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}AOij$\* AODij+$\sum\_{i=1}^{3}\sum\_{j=1}^{3}ZOij$\* ZODij+ $\sum\_{i=1}^{3}SDi\*SOi $+$\sum\_{i=1}^{3}TDi\*TOi$

Изменятся условия ограничения для каждого звена цепочки, так как добавятся потоки сырья и товаров от внешних поставщиков.

Условия обеспечения агрокультурами комбикормовых заводов:

$\sum\_{j=1}^{3}ZX1j\* ZT1ij$<=$\sum\_{j=1}^{3}ADji1$ +AODi1

$\sum\_{j=1}^{3}ZX2j\* ZT2ij$<=$\sum\_{j=1}^{3}ADji2+$ AODi2

$\sum\_{j=1}^{3}ZX3j\* ZT3ij$<=$\sum\_{j=1}^{3}ADji3$+ AODi3

Условия обеспечения комбикормами свиноферм:

$SX1\* ST1j$<=$\sum\_{i=1}^{3}ZDij1$+ZODj1

$SX2\* ST2j$<=$\sum\_{i=1}^{3}ZDij2$+ZODj2

$SX3\* ST3j$<=$\sum\_{i=1}^{3}ZDij3$+ZODj3

Условия обеспечения мясом :

$MX1\* M1$<=$\sum\_{i=1}^{3}SDi1$+SD1

$MX2\* M2$<=$\sum\_{i=1}^{3}SDi2$+SD1

$MX3\* M3$<=$\sum\_{i=1}^{3}SDi3$+SD1

**Запишем условие на выполнение программы по сбыту в последнем звене:**

TKi<=$\sum\_{j=1}^{3}MDji$**+TDi**

Разумеется добавим условия на неотрицательность переменных по внешним поставщикам:

AODij>=0

ZODij>=0

SODi>=0

TODi>=0

И условия на ограниченность по мощностям внешних поставщиков:

Aij >= AODij

Zij>= ZODij

Si>= SODi

Mi>= TODi

Математическая модель получилась на первый взгляд достаточной сложной. Однако если следовать общей схеме моделирования вертикально интегрированного холдинга, составить математическую модель не так уж сложно. Давайте, резюмируем и построим эту схему.

1. Определяем все звенья производственной цепочки. Для каждого звена цепочки определяем перечень продукции, который производится на данном звене. Определяем количество предприятий в данном звене.
2. Для каждого предприятия звена определяем : себестоимость производства продукции, ограничение по мощности, коэффициенты расхода сырья
3. Определяем матрицы расстояний от поставщиков к потребителям. Определяем стоимость перевозки единицы продукции на 1 км.
4. Вводим матрицу транспортировки от поставщика потребителю. Именно эти матрицы и будут являться решением логистической задачи.
5. Записываем целевую функции как сумму затрат производства на каждом звене и транспортировки до следующего звена
6. Записываем условия на неотрицательность искомых переменных.
7. Записываем условия на ограничения мощностей для каждого предприятия каждого звена
8. Записываем условия для обеспеченности каждого звена необходимым сырьем или товарами
9. Решаем задачу с помощью линейного программирования ищем оптимальные распределения , которые минимизируют целевую функцию общих затрат холдинга.