**Целочисленное и бинарное программирование.**

Целочисленное программирование — раздел [математического программирования](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5), в котором на все или некоторые переменные дополнительно накладывается ограничение целочисленности.

Целочисленное программирование используется в экономических задачах про инвестиции. В этих задачах, как правило, требуется определить количество оборудования, необходимого для оптимального выполнения производственного плана. Разумеется , что количество станков может быть только целым. Рассмотрим пример такой задачи.

**Задача 1**

Есть три типа станков. Для каждого станка определена стоимость обслуживания в день, себестоимость единицы продукции, производительность (количество продукции в день). У предприятия есть дневной план. Определить, сколько нужно использовать станков каждого типа, чтобы суммарная стоимость выпуска была минимальной.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |   |   |   |   |
| ***Тип станков*** | Цена обслуживания | Цена единицы продукции | Производительность в день | Наличие станков |  |   |
| Alpha-1000 | $200  | $1,50  | 40 | 8 |  |   |
| Alpha-2000 | $275  | $1,80  | 60 | 5 |  |   |
| Alpha-3000 | $325  | $1,90  | 85 | 3 |   |   |
|  |  |  |  |  |  |  |

План в день 700.

**Математическая модель.**

1. **Что нам нужно найти?**

Количество станков каждого типа xi, чтобы выполнить план в день и чтобы стоимость выпуска была минимальной.

1. **Построение математической модели.**

Введем переменные:

pi – цена обслуживания станка i –го типа

ci – себестоимость единицы продукции на станке i –го типа

oi – производительность в день станка i –го типа

ai – наличие станка i –го типа

Plan – план производства в день

Целевая функция = полная стоимость производства = Стоимость обслуживания станков + Себестоимость продукции

Стоимость обслуживания станков = $\sum\_{i=1}^{3}\left(x\_{i}pi \right)$

Себестоимость продукции=$\sum\_{i=1}^{3}\left(x\_{i}oi ci \right)$

Целевая функция =$\sum\_{i=1}^{3}\left(x\_{i}pi \right)$ +$\sum\_{i=1}^{3}\left(x\_{i}oi ci \right) $-> minimum

Ограничения:

xi>=0 – условие неотрицательности искомых величин

xi – целые, количество станков может быть только целым

Условие выполнение плана $\sum\_{i=1}^{3}\left(x\_{i}oi \right)$>= Plan

Условие ограничения наличия станков Xi<=Ai

**Задача 2.**

Другим распространенным видом целочисленных задач являются задачи расписаний.

Дано возможные недельные варианты расписаний смен , для каждого варианта указаны выходные дни. Указана стоимость рабочей смены, а также потребность в рабочих на каждый день недели. Определить сколько рабочих должных работать по разным расписаниям , чтобы суммарные затраты были минимальными.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Расписание.*** |  ***Выходные*** | ***Количество рабочих по данному расписанию*** |  | ***Sun*** | ***Mon*** | ***Tue*** | ***Wed*** | ***Thu*** | ***Fri*** | ***Sat*** |
|  ***A*** | *Воскр, Понед* | 3 |  | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  ***B*** | *Понед, Вторник* | 5 |  | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  ***C*** | *Вторник, Среда.* | 6 |  | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
|  ***D*** | *Среда., Четверг* | 4 |  | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
|  ***E*** | *Четверг, Пятница* | 6 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
|  ***F*** | *Пятница, Суббота* | 1 |  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|  ***G*** | *Суббота, Воскресенье* | 0 |   | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | ***Всего рабочих по дням недели:*** | 25 |  | 22 | 17 | 14 | 15 | 15 | 18 | 24 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | ***Потребность рабочих по дням недели:*** |  |  | 22 | 17 | 13 | 14 | 15 | 18 | 24 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | Цена рабочего в день: | $40  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Математическая модель.**

1. **Что нам нужно найти?**

Количество рабочих по каждому виду расписания, так чтобы выполнялась потребность рабочих в каждый день, и общая оплата труда была минимальной.

1. **Построение математической модели.**

Введем переменные:

Xi- количество рабочих по i-му расписанию.

Aij – матрица расписаний I строка указывает номер расписания j столбец день недели

Если aij=1 то это значит что для I –го расписания j –ый день недели рабочий.

Если aij=1 то это значит что для I –го расписания j –ый день недели выходной.

Dj – потребность в рабочих в j день недели.

Pj- цена рабочей смены в j- ый день

Целевая функция = Стоимость рабочих за все дни = $\sum\_{j=1}^{7}Pj\*(\sum\_{i=1}^{7}Aij\*Xi)$

Внутренняя сумма в этой формуле $\sum\_{i=1}^{7}Aij\*Xi$ показывает, сколько рабочих будет работать в j -ый день.

Целевая функция -> minimum

Ограничения:

xi>=0 – условие неотрицательности искомых величин

xi – целые, количество рабочих может быть только целым

Условия выполнения потребности в рабочих на каждый день : $\sum\_{i=1}^{7}Aij\*Xi$>=Dj

**Бинарное программирование**

 Бинарное программирование это отдельный класс задач. Переменные в бинарном программировании могут принимать только два значения 0 или 1.

Бинарное программирование используется в задачах , где нужно получить ответ открывать (1) или закрывать предприятие (0). Рассмотрим пример такой задачи.

**Задача 3.**

Существует 4 карьера. Для каждого карьера известны данные по параметрам руды, добываемой в данном карьере, а именно

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Информация о карьерах*** |   |   |   |
|   | Наличие кальция в руде карьера % на тонну | Наличие магния в руде карьера % на тонну | Максимальная производительность в год (тоннах) | Цена содержания карьера в год ($Million) | Использовать карьер или нет (1=да, 0=нет) |
| Карьер 1 | 1 | 2,3 | 2000 | 3,5 | 1 |
| Карьер 2 | 0,7 | 1,6 | 2500 | 4 | 1 |
| Карьер 3 | 1,5 | 1,2 | 1300 | 4 | 1 |
| Карьер 4 | 0,7 | 4,1 | 3000 | 2 | 1 |

Задано требуемое количество кальция и магния, которое необходимо получить с карьера. Определить какие карьеры нужно использовать и сколько производить на каждом карьере.

 **Математическая модель.**

1. **Что нам нужно найти?**

В данной задаче нам нужно определить, какие карьеры использовать и сколько добыть руды на каждом карьере. Т.е. в первую очередь нам нужно определить для каждого карьера стоит ли его использовать.

Для этого введем переменную Ai = 1 если I – карьер будет использован и Ai= 0 если I –ый карьер не будет использоваться.

Xi – количество руды сколько нужно добыть на I –ом карьере.

Итак, в задаче нам нужно определить Ai и Xi так, чтобы выполнить годовой план по добычи кальция и магния и чтобы стоимость добычи была минимальной.

1. **Построение математической модели.**

Введем переменные:

Ci – наличие кальция в тонне руды i-го карьера

Mi – наличие магния в тонне руды i-го карьера

Pi – максимальная производительность i-го карьера в год

Hi- цена добычи тонны руды на i-ом карьере

Ki- цена содержания i-го карьера в год

Dm - годовая потребность магния в тоннах в год

Dc - годовая потребность кальция в тоннах в год

Целевая функция = Полная стоимость содержания карьеров и добычи руды =

Стоимость содержания карьеров + Стоимость добычи руды =$\sum\_{i=1}^{4}Ai\*Ki$+$\sum\_{i=1}^{4}Ai\*Xi\*Hi$

Целевая функция -> minimum

Ограничения:

xi>=0 – условие неотрицательности искомых величин

Ai – бинарные значения, т.е. эти переменные могут принимать значения либо о, либо 1

Условие выполнения потребности в кальции : $\sum\_{i=1}^{7}Ai\*Xi\*Ci$>=Dс

Условия выполнения потребности в магнии : $\sum\_{i=1}^{7}Ai\*Xi\*Mi$>=Dm

Условие ограничения мощности карьеров: Ai\*Xi<=Pi